

最適化法演習レポート

1510006313 手塚 康久

11/22/2021

はじめに

5人の俳優が5つの役を演じる。1人の俳優が演じるのは1役であり、評価値の和を最大化させるのが目的である。

(1) 定式化

決定変数の定義

俳優 i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) が役 j ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) に就くとき, $x_{ij} = 1$, 就かないとき, $x_{ij} = 0$ とする。 x_{ij} は俳優 i が役 j に就く可能性がある場合にのみ定義する。すなわち,

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (i, j) \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 5), (3, 4), (4, 5), (5, 3)\} \quad (1)$$

である。

目的関数の定式化

この問題の目的は、配役の効果を最大化させることなので、適役の和を目的関数とする。適役和は問題より、

$$z = 5x_{11} + x_{13} + 2x_{22} + 8x_{24} + 7x_{25} + 4x_{31} + 6x_{33} + 7x_{34} + 9x_{43} + 4x_{45} + 7x_{51} + 8x_{52} + 6x_{55} \quad (2)$$

と表せ、この z を最大化させることが目的となる。

制約の定式化

1俳優は1役なので、問題より

$$\text{俳優1 } x_{11} + x_{13} = 1 \quad (3)$$

$$\text{俳優2 } x_{22} + x_{24} + x_{25} = 1 \quad (4)$$

$$\text{俳優3 } x_{31} + x_{33} + x_{34} = 1 \quad (5)$$

$$\text{俳優4 } x_{43} + x_{45} = 1 \quad (6)$$

$$\text{俳優5 } x_{51} + x_{52} + x_{55} = 1 \quad (7)$$

また,

$$\text{役1 } x_{11} + x_{13} + x_{15} = 1 \quad (8)$$

$$\text{役2 } x_{22} + x_{25} = 1 \quad (9)$$

$$\text{役3 } x_{31} + x_{33} + x_{34} = 1 \quad (10)$$

$$\text{役4 } x_{43} + x_{45} = 1 \quad (11)$$

$$\text{役5 } x_{51} + x_{52} + x_{55} = 1 \quad (12)$$

が制約式となる.

$$\text{2値条件は, } x_{11}, x_{12}, \dots, x_{55} \in \{0,1\} \quad (13)$$

である.

目的関数(2)の係数をベクトルでまとめて

x_{11}	x_{13}	x_{22}	x_{24}	x_{25}	x_{31}	x_{33}	x_{34}	x_{43}	x_{45}	x_{51}	x_{52}	x_{55}
5	1	2	8	7	4	6	7	9	4	7	8	6

また各俳優が1役だけ演じる制約(3)-(7)と各役を1俳優だけ演じる制約(8)-(12)の左辺の係数は行列の形にまとめて

	X ₁₁	X ₁₃	X ₂₂	X ₂₄	X ₂₅	X ₃₁	X ₃₃	X ₃₄	X ₄₃	X ₄₅	X ₅₁	X ₅₂	X ₅₅
A1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A2	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
A3	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
A4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
A5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
R1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
R2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
R3	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
R4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
R5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1

と表す。ここでラベルの A1 は俳優 1, R1 は役 1 を表す。以上この問題(1)-(13)の最適解を R のパッケージ lpSolve を用いて計算する手順は以下の通りである。

```
library(lpSolve)
```

```
f.varname <-
```

```
c("x11", "x13", "x22", "x24", "x25", "x31", "x33", "x34", "x43", "x45", "x51", "x52", "x55")
```

```
f.conname <- c("A1", "A2", "A3", "A4", "A5", "R1", "R2", "R3", "R4", "R5")
```

```

f.obj <- c(5,1,2,8,7,4,6,7,9,4,7,8,6)
names(f.obj) <- f.varname
print(f.obj)

## x11 x13 x22 x24 x25 x31 x33 x34 x43 x45 x51 x52 x55
##  5  1  2  8  7  4  6  7  9  4  7  8  6

f.con <- matrix(c(1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
                 0,0,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
                 0,0,0,0,0,1,1,1,0,0,0,0,0,0,
                 0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,
                 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,
                 1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,
                 0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,
                 0,1,0,0,0,0,1,0,1,0,0,0,0,0,
                 0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,
                 0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,1),
               ncol=13, byrow=TRUE)
colnames(f.con) <- f.varname
rownames(f.con) <- f.conname
print(f.con)

##   x11 x13 x22 x24 x25 x31 x33 x34 x43 x45 x51 x52 x55
## A1  1  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
## A2  0  0  1  1  1  0  0  0  0  0  0  0  0
## A3  0  0  0  0  0  1  1  1  0  0  0  0  0
## A4  0  0  0  0  0  0  0  0  1  1  0  0  0
## A5  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  1  1
## R1  1  0  0  0  0  1  0  0  0  0  1  0  0
## R2  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0
## R3  0  1  0  0  0  0  1  0  1  0  0  0  0
## R4  0  0  0  1  0  0  0  1  0  0  0  0  0
## R5  0  0  0  0  1  0  0  0  0  1  0  0  1

f.dir <- rep("=",10)
f.rhs <- rep(1,10)
f.bin <- 1:13

```

```

f.res <- lp("max", f.obj, f.con, f.dir, f.rhs, binary.vec =f.bin)
print(f.res)

## Success: the objective function is 36

print(f.res$solution)

## [1] 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0

f.sol <- f.res$solution
names (f.sol) <- f.varname
print(f.sol[f.sol==1])

## x11 x25 x34 x43 x52
## 1 1 1 1 1

print(f.res$objval)

## [1] 36

```

(2) 最適配役

よって配役は、俳優1役1、俳優2役5、俳優3役4、俳優4役3、俳優5役2で、
目的関数の最適値（最大値）は36である。

アンケート

1. macOS
2. lpSolve